Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático
Asignatura: Análisis IV (variable compleja)
Curso: $4^{\underline{o}}$ **de Matemáticas (Fundamental)**

Ejercicios para hacer en casa

1. Sea
$$\operatorname{cotg}(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$
el desarrollo de Laurent de $\operatorname{cotg}(\pi z)$ en el anillo $A(0;1,2)$. Calcúlense los coeficientes a_n para n entero negativo.

2. Pruébese que la función
$$f(z) = \sum_{k=o}^{n} \frac{z^k}{k!}$$
tiene n ceros distintos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ que verifican la igualdad:
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_j^q} = 0 \quad (2 \leqslant q \leqslant n)$$
Sugerencia: consíderese la integral $\displaystyle\int_{C(6,R)} \frac{z^k}{f(z)}\, dz \quad (0 \leqslant k \leqslant n-2)$

3.
   a) Pruébese que hay una única función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)})$ tal que para $|z| > 1$ es $f(z)^2 = z^2 + z + 1$ y $f(x) > 0$ para $x > 1$.
   b) Calcular la integral
   $$\int_{C(0,R)} \frac{1}{f(z)}\, dz \quad (R > 1)$$
   donde $f(z)$ es la función obtenida en el apartado anterior.

Fecha de entrega: 23 de mayo.